Hauscurriculum Mathematik SEK II

Einführungsphase

Johanneum Gymnasium Herborn

E 0 Grundsätzliche Forderungen

1. Unterschiedliche Voraussetzungen sollen ausgleichen werden.
2. Einführung der Differentialrechnung soll möglichst früh erfolgen.
3. Unterschiedliche Ansprüche zwischen Grund- und Leistungskursen verdeutlichen.
4. Die Punkte E1 bis E6 sollen nur in dieser Reihenfolge behandelt werden (die Reihenfolge in den Unterpunkten kann abgeändert werden).
5. Die zeitlichen Vorgaben sind Minimalangaben.
6. Aufgrund eines Fachbereichsbeschlusses sind die Methodenmodule verbindlich.

E 1: Funktionen und ihre Darstellung

Untersuchung ganzrationaler Funktionen 5 Wochen

1. Definitionsmenge
2. Wertemenge
3. Wertetabelle
4. Grafische Darstellung
5. Funktionsgleichung/-term
6. Symmetrie
7. Verschiebung und Streckung
8. Achsenschnittpunkte
9. Schnittpunkte von Funktionen
10. Modellierung von Realsituationen
11. Lösen von Polynomgleichungen (Polynomdivision nicht erforderlich)
12. *Basismodul "Visialisierung" (Graph zeichnen)*

<u>Beispielaufgabe</u>
Bestimme die Gleichung der Seitenhalbierenden des Dreiecks durch die Punkte A(0/-2), B(12/2) und C(2/7) sowie die Koordinaten des Schwerpunktes.

E 2: Einführung des Ableitungsbegriffs 10 Wochen

1. Globale Untersuchung des Änderungsverhaltens von Funktionen – auch im Sachzusammenhang
2. Grafisches Differenzieren mit Hilfe des *Anwendungsmoduls "Verbalisierung: Grafisches Differenzieren"*
3. Sekantensteigung und Tangentenproblem (Anschauliche Einführung des Grenzwertbegriffs, Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung, Änderungsrate)
4. Tangente als lineare Approximation einer Funktion
5. Ableitungsbegriff, Ableitungsfunktion
6. Grenzwerte
7. Ableitung von $f(x) = x^n$ für $n \in Z$ sowie deren Beweis für betragsmäßig kleines n

8. Ableitungsregeln (Summen-, Faktor-, Potenzregel)
   Exemplarische Beweise der Ableitungsregeln

E 3: Anwendung des Ableitungsbegriffs 10 Wochen

1. Kurvendiskussion an ganzrationalen Funktionen

   - Nullstellen
   - Extrema
   - Wendepunkte
   - Symmetrie
   - Monotonie
   - Krümmungsverhalten
   - Zeichnung
   - *Basismodul Mathematischer Beweis: Notwendiges Kriterium für Extrema*
   - Problematisierung und Herleitung von Notwendigem und Hinreichendem Kriterium mittels höherer Ableitungen, Vorzeichenwechselkriterium
   - Funktionsuntersuchung

2. Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen mit Hilfe ihrer Eigenschaften

3. Extremalprobleme

<u>Beispielaufgaben</u>

1. Untersuche die Funktion $f(x) = x^6 – 2x^3$ auf Extrema.

2. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades besitzt in W(0,5/-1) einen Wendepunkt und schneidet bei x = 1 die x-Achse im Winkel von 45° ?

3. Welche zum Ursprung des Koordinatensystems symmetrische ganzrationale Funktion 5. Grades besitzt im Ursprung eine Tangente mit der Gleichung y = 7x und in W(1/0) einen Wendepunkt?

4. Einem Kegel wird eine quadratische Säule einbeschrieben. Wie müssen die Maße der Säule gewählt werden, damit deren Volumen maximal wird?
   Wie viel % des Kegels wird von der Säule eingenommen?

5. Eine rechteckige Glasscheibe mit der Höhe 1,1 m und der Breite 0,5 m hat einen Riss von parabolischer Gestalt erhalten, der 0,2 m von der linken unteren Ecke ausgeht, auf die linke obere Ecke zuläuft und die linke Seite dort orthogonal trifft.
   Wie kann man aus dem rechten Reststück noch eine möglichst (flächenmäßig) große rechteckige Scheibe ausschneiden? (Randextremum!)

E 4: Exponentialfunktionen 6 Wochen

1. Wachstums- und Zerfallsprozesse
2. Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x + c$
3. Halbwertszeit, Verdopplungszeit
4. Modellierung von Realsituationen
5. *Anwendungsmodul "Präsentation"*
6. Vergleichen mit linearen und quadratischen Funktionen
7. Natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$

8. Anschauliche Herleitung der Eulerschen Zahl
9. Transformationen einer Funktion beliebiger Basis in eine Funktion mit der Basis e
10. Ableitung von $f(x) = e^x$
11. Algebraisches Lösen von Exponentialgleichungen – auch mit Hilfe des Taschenrechners (Logarithmengesetze nicht unbedingt erforderlich)

Beispielaufgabe

2 g einer radioaktiven Substanz besitzt eine Halbwertszeit $t_H = 34{,}7$ d.
Nach welcher Zeit sind nur noch 10 % der Substanz vorhanden?

Nach welcher Zeit beträgt die Abnahmegeschwindigkeit der Substanz $1\ \frac{mg}{s}$?

E 5: Trigonometrische Funktionen 3 Wochen

1. Periodische Prozesse
2. Bogenmaß
3. Untersuchung trigonometrischer Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$ und $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x - c)] + d$
4. Realsituationen anhand gegebenen Datenmaterials
5. Vergleichen mit ganzrationalen Funktionen
6. Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion – auch mit Hilfe grafischen Differenzierens

Beispielaufgaben

1. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $3 \cdot \sin(x) = -2{,}4$
2. Bestimmen Sie die Nullstellen und die Extrema der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$ auf dem Intervall $[0; 2\pi]$

E 6: Weitere Ableitungsregeln 2 Wochen

1. Produkt- und Kettenregel
2. Multiplikation und Verkettung bekannter Funktionsklassen

Fakultativ: E 7 und E 8

E 7: Weitere Verfahren zum Lösen von Gleichungen

Polynomdivision
Faktorisieren von Polynomthermen zur Nullstellenbestimmung
Numerische Lösungsverfahren: Newton, Regula falsi (Konvergenzgeschwindigkeit)

E 8: Folgen und Reihen

Arithmetische und geometrische Folgen, Nullfolgen
Konvergenz und Divergenz (Grenzwertsätze)

Analysis II

Anforderungsprofil im Grundkurs / **Zusätzliche Anforderungen im Leistungskurs**

Q 1.1 Einführung in die Integralrechnung

Bedeutung des Integrals als Bestandsgröße und Flächeninhalt
Das Integral in Sachzusammenhängen
Bestimmung des Bestands durch den Anfangsbestand und der Änderungsrate
Veranschaulichung des Bestands als Inhalt einer Fläche unter einem Funktionsgraphen
Flächen unter einem Funktionsgraphen
Approximieren von Flächeninhalten durch Rechtecksummen und dabei Übergang zum bestimmten Integral
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Graphische Veranschaulichung des Hauptsatzes als Beziehung zwischen Differenzieren und Integrieren
Herleitung folgender Integrationsregeln mit Hilfe der Ableitungsregeln:
- Potenzregel: $f(x) = x^n$ für $n \in Z \setminus \{-1\}$
- Faktorregel
- Summenregel
- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$
- Trigonometrische Funktionen: $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$

Q 1.2. Anwendungen der Integralrechnung

Flächeninhaltsberechnungen
Schnittflächen zwischen Funktionen und den Koordinatenachsen (auch in Sachzusammenhängen)
Anwendung der Integralrechnung in Sachzusammenhängen (z. B. für die Bestimmung des Bestandes)
Rotationsvolumen bei der Rotation um die x-Achse (auch Wurzelfunktion als Randfunktion)
Volumenberechnung realer Gegenstände durch rotierende Flächen
Uneigentliche Integrale (Untersuchung unendlich ausgedehnter Flächen)

Q 1.3. Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung

Erweiterung und Vertiefung der Inhalte der Einführungsphase:
- Funktionen und ihre Darstellung
- Ableitungsbegriff mit Anwendungen
- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Trigonometrische Funktionen
- Ableitungsregeln

Untersuchung und Integrieren von e-Funktionen, die mit ganzrationalen Funktionen verknüpft sind (Addition, Multiplikation und Verkettung) – auch im Sachzusammenhang:

- Lineare Substitution
- Nachweis der Stammfunktion durch Ableiten
- Ermittlung der Stammfunktion durch Formansatz mit Koeffizientenvergleich

Wachstums- und Zerfallsprozesse
Modellieren begrenzter und logistischer Wachstumsprozesse unter Einbeziehung experimenteller Daten (ohne Herleitung mit Differenzialgleichungen)
Die natürliche Logarithmusfunktion f(x) = ln(x)
Umkehrfunktion – auch am Beispiel der Logarithmusfunktion
F(x) = ln(x) + c als Stammfunktion von f(x) = $\frac{1}{x}$
Approximation von Funktionen
Lokale Linearisierung mit Hilfe der Ableitung

Von den folgenden Themen Q 1.4, Q 1.5 und Q 1.6 muss ein weiteres Thema behandelt werden, welches durch einen Erlass rechtzeitig bekannt gegeben wird.

Q 1.4 Funktionenscharen

Ganzrationale Funktionenscharen (Funktionsuntersuchung in Abhängigkeit des Parameters – auch als Einfluss auf den Graphen, Integration)

Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten
Funktionenscharen, bei denen die e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen verknüpft sind (Addition, Multiplikation und Verkettung)

Q 1.5 Approximation

Approximation funktionaler Zusammenhänge
Interpolation durch ganzrationale Funktionen
Lineare Regression
Methode der kleinsten Quadrate

Vergleich verschiedener Ausgleichskurven als mathematische Modelle für gegebene Daten
Quadratische und exponentielle Regression
Beurteilung der Passgenauigkeit

Q 1.6 Weitere Anwendungen der Integralrechnung

Rotationsvolumen bei der Rotation um die x-Achse (auch Wurzelfunktion als Randfunktion)
Volumenberechnung realer Gegenstände durch rotierende Flächen

Bogenlänge
Näherungsweises Berechnen von Integralen
Beurteilung der Genauigkeit
Trapezregel
Keplersche Fassregel

Lineare Algebra / Analytische

Anforderungsprofil im Grundkurs / **Zusätzliche Anforderungen im Leistungskurs**

Q 2.1 Lineare Gleichungssysteme

Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme
(auch über- und unterbestimmte LGS)
Lösungsverfahren und Lösungsmenge
Gauß-Algorithmus
Lösen von LGS mit Hilfe des Taschenrechners
Darstellung von LGS mit Hilfe von Koeffizientenmatrizen
Geometrische Interpretation der Lösungsmenge
Anwendungen der LGS (auch durch Behandlung außermathematischer Probleme)

Q 2.2 Orientieren und Bewegen im Raum

Räumliche Koordinatensysteme
Schrägbilder von dreidimensionalen Objekten
Einsatz von Geometriesoftware
Vektoren (Ortsvektor, Addition und Vervielfachung, Kollinearität, Betrag)
Abstand zweier Punkte im Raum
Skalarprodukt
Orthogonalität von Vektoren
Winkel zwischen Vektoren
Untersuchung einfacher geometrischer Figuren und Körper (Seitenlängen, Parallelität, Orthogonalität, Winkelgrößen)

Q 2.3 Geraden und Ebenen im Raum

Parameterform von Gerade und Ebene im Raum
Lagebeziehungen zweier Geraden und von Gerade und Ebene (Schnittpunkt, Schnittwinkel)
Geometrische Objekte im Raum (z. B. Pyramide)
Geradlinige Bewegungen
Schattenwürfe
Koordinatenform der Ebene
Normalenvektor und Normalenform der Ebene
Umwandlung der verschiedenen Darstellungsformen
Lagebeziehungen von Punkt, Gerade und Ebene untereinander (mit Hilfe der KF)
Schnittgerade zweier Ebenen
Lotfußpunktverfahren zur Abstandsbestimmung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen
Vektorprodukt (Bestimmung des Normalenvektors)

Von den folgenden Themen Q 2.4, Q 2.5 und Q 2.6 muss im Grundkurs ein weiteres Thema behandelt werden, im Leistungskurs eines der Themen Q 2.4 oder Q 2.5, welches durch einen Erlass rechtzeitig bekannt gegeben wird.

Q 2.4 Matrizen zur Beschreibung von Übergangsprozessen

Beschreibung von Übergangsprozessen und deren Zustandsdiagrammen mit Hilfe von Matrizen (z. B. Populationsentwicklung, Wählerverhalten, Kundenströme)
Skalare Multiplikation von Matrizen
Matrix-Vektor-Multiplikation
Matrizenmultiplikation
Bestimmung inverser Matrizen mit Hilfe des Taschenrechners
Markov-Ketten (Modellieren von Übergangsprozessen mit Matrizen, schrittweises Berechnen von Zuständen, Bestimmen stabiler Zustände mit Hilfe von Fixvektoren)
Langfristige Entwicklung von Übergangsprozessen
Nutzen von Potenzen von Matrizen
Grenzprozesse und deren Interpretation

Q 2.5 Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen

Beschreibung geometrischer Abbildungen mit Hilfe von Matrizen (z. B. Schattenwürfe oder andere Projektionen)
Skalare Multiplikation von Matrizen
Matrix-Vektor-Multiplikation
Matrizenmultiplikation
Bestimmung inverser Matrizen mit Hilfe des Taschenrechners
Abbildungsmatrizen im R^3:
- Berechnung von Bildpunkten beliebiger Abbildungsmatrizen
- orthogonale Spiegelungen an den Koordinatenebenen
- Parallelprojektionen auf die Koordinatenebenen
- zentrische Streckung am Ursprung
- Verknüpfung der Abbildungen

Weitere Abbildungsmatrizen im R^3:
- **Drehungen im den Ursprung**
- **Parallelprojektionen auf beliebige Ebenen durch den Ursprung**
- **Bestimmung von Fixpunkten**

Q 2.6 Vertiefung der Analytischen Geometrie (nur im Grundkurs)

Koordinatenform der Ebene
Normalenvektor und Normalenform der Ebene
Umwandlung der verschiedenen Darstellungsformen
Lagebeziehungen von Gerade und Ebene mit Hilfe der KF
Lotfußpunktverfahren zur Abstandsbestimmung zwischen Punkt und Ebene

Stochastik

Anforderungsprofil im Grundkurs / **Zusätzliche Anforderungen im Leistungskurs**

Q 3.1 Grundlegende Begriffe der Stochastik

Zufallsexperiment
Ergebnis und Ereignis
Absolute und relative Häufigkeit
Häufigkeitsverteilungen und grafische Darstellungen
Simulation von Zufallsexperimenten mit einer geeigneten Software (z. B. Tabellenkalkulation)
Statistische Erhebungen
Mittelwert, empirische Varianz und Standardabweichung
Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
Laplace-Wahrscheinlichkeit
Mehrstufige Zufallsexperimente
Baumdiagramme und Pfadregel (Summen- und Produktregel)

Q 3.2 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Baumdiagramme, Vierfeldertafel
Unabhängigkeit von Ereignissen
Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten
Kobinatorische Zählverfahren:
- Geordnete Stichproben mit Zurücklegen
- Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen
- Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Binomialkoeffizient

Q 3.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Darstellung durch Histogramme
Analyse von Histogrammen
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung
Bernoulli-Experimente, Bernoulli-Kette mit Bernoulli-Formel
Modellierungen von Sachzusammenhängen und deren Grenzen
Binomialverteilte Zufallsgrößen
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei binomialverteilten Zufallsgrößen
Kumulierte Binomialverteilung und deren Berechnung mit Tabellen und dem TR

Normalverteilung als Näherungsformel für die Binomialverteilung:
Dichte- und Verteilungsfunktion (Abgrenzung gegenüber diskreten Zufallsgrößen)
Erwartungswert und Standardabweichung
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen in Sachzusammenhängen (auch mit digitalen Werkzeugen)

Von den folgenden Themen Q 3.4, Q 3.5 muss ein weiteres Thema behandelt werden, welches durch einen Erlass rechtzeitig bekannt gegeben wird.

Q 3.4 Hypothesentests (für binomialverteilte Zufallsgrößen)

Hypothesen
Alternativtest
Einseitiger Hypothesentest
Verwerfungsbereich und Entscheidungsregel
Fehler erster und zweiter Art
Irrtumswahrscheinlichkeiten (Berechnung auch mit digitaler Werkzeuge)
Entwickeln einseitiger Hypothesentests (Entscheidungsregel zu vorgegebenem Signifikanzniveau

Entwickeln zweiseitiger Hypothesentests

Q 3.5 Prognose- und Konfidenzintervalle (Für binomialverteilte Zufallsgrößen)

Sigma-Regeln (1σ-Umgebung, 2σ-Umgebung, 3σ-Umgebung) an konkreten Binomialverteilungen
Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten auf der Grundlage der Sigma-Regeln
Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe
Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten auf der Grundlage der Sigma-Regeln
Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit
Konfidenzniveau und Konfidenzintervalle in Sachzusammenhängen

Schätzen von Stichprobenumfängen anhand vorgegebener Konfidenzniveaus auf der Grundlage der Sigma-Regeln

Kurshalbjahr 13/II

Mögliche Kursthemen und Unterrichtsinhalte. Die Auswahl erfolgt durch die **Lehrkraft**.

- Eines der Themenfelder Q 4.1 bis Q 4.3 und
- Eines der Themenfelder Q 4.4 bis Q 4.9 oder eines der Themenfelder aus Q 1 bis Q 3, das für diesen Abiturjahrgang in den vergangenen Halbjahren noch nicht bearbeitet wurde

Themenfelder mit prozessbezogenem Schwerpunkt:

Q 4.1 Argumentieren und Beweisen

Formulieren eigenständiger Vermutungen zu gegebenen Fragestellungen
Nachvollziehen, Erläutern und Entwickeln von Argumentationen und logischen Schlussfolgerungen (insbesondere zu Inhaltsbereichen der SEK II)
Beweisverfahren (z. B. direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion)

Q 4.2 Problemlösen

Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme
Strategien zur Lösung mathematischer Probleme (z. B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren, Extremalprinzip, Symmetrieprinzip)

Q 4.3 Modellieren

Strukturieren, Vereinfachen und Mathematisieren realer Problemstellungen
Interpretieren und Überprüfen mathematischer Ergebnisse
Reflektieren der Schritte des Modellierungskreislaufs

Themenfelder mit inhaltsbezogenem Schwerpunkt:

Q 4.4 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe von Differenzialgleichungen
Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen erster Ordnung (Richtungsfeld – auch durch Einsatz digitaler Werkzeuge, Separation der Variablen und andere elementare Lösungsverfahren)
Differenzialgleichungen zweiter Ordnung – z. B. bei periodischen Prozessen

Q 4.5 Numerische Optimierung

Lösen von realitätsnaher Extremalproblemen: Zielfunktionen, numerische Extremwertbestimmung (z. B. Bisektionsverfahren oder Newtonverfahren) – auch mithilfe digitaler Werkzeuge
Anwendung und Erarbeitung von Algorithmen

Grenzen der Modellierung und der numerischen Verfahren
Anwendung der numerischen Optimierung in mehreren Variablen
Höhendiagramme

Q 4.6 Kreis und Kugel

Kreise in Vektorform und als Koordinatengleichung
Punktprobe
Lagebeziehungen zwischen zwei Kreisen
Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade
Bestimmung der Schnittmenge
Kugeln in Vektorform und als Koordinatengleichung
Punktprobe
Lagebeziehung zwischen Kugeln und Geraden sowie die Bestimmung der Schnittmenge
Lagebeziehung zwischen zwei Kugeln
Beschreibung realer Objekte mit Kugeln und Kreisen
Lagebeziehung zwischen Kugeln und Ebenen sowie die Bestimmung der Schnittmenge
Schnittmengenbestimmung zwischen zwei Kugeln

Q 4.7 Weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hypergeometrische Verteilung (Wahrscheinlichkeiten in Sachzusammenhängen, z. B. Lotto, Keno; Vergleich mit der Binomialverteilung)
Poisson-Verteilung (Näherung der Binomialverteilung für seltene Ereignisse)
Poisson-Verteilung als Näherung der Binomialverteilung für große n (Beweis des Grenzübergangs)

Q 4.8 Komplexe Zahlen

Algebraische Form: Real- und Imaginärteil, Rechnen mit komplexen Zahlen
Polarform: Gaußsche Zahlenebene; $z = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$
Gleichungen in C
Darstellung der komplexen Zahlen als 2x2-Matrizen

Q 4.9 Graphentheorie

Beschreibung von Realsituationen von Graphen
Grundlegende Begriffe wie z. B. Knoten und Kanten
Handschlaglemma; Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad
Darstellung von Graphen mit Matrizen
Isomorphie von Graphen, Eulerwege
Das Kürzeste-Wege-Problem: Wegprobleme an Alltagsbeispielen, Kantengewichten, eigene algorithmische Lösungsansätze, Beschreibung und Anwendung von Breitensuche und Dijkstra-Algorithmus anhand einfacher Beispiele
Begründen der Korrektheit der verwendeten Algorithmen